

Prvi kolokvij iz kolegija **Modalna logika**

Prvi zadatak nosi maksimalno 10 bodova, a ostali zadaci po 5 bodova.

1. Normalnu modalnu logiku **S4** dobivamo proširenjem sistema **K** aksiomima $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ i $\Box p \rightarrow p$. Dokažite da je logika **S4** adekvatna i potpuna u odnosu na klasu svih refleksivnih i tranzitivnih okvira.
2. Za relaciju $R \subseteq W \times W$ kažemo da je parcijalna funkcija ako za sve $x, y, z \in W$ vrijedi da xRy i xRz povlači $y = z$. Dokažite da za svaki Kripkeov okvir $\mathfrak{F} = (W, R)$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{F} \models \Diamond p \rightarrow \Box p \text{ ako i samo ako relacija } R \text{ je parcijalna funkcija.}$$

3. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ neki Kripkeov model. Neka je $Z \subseteq W \times W$ neka bisimulacija. Dokažite da je tada i relacija Z^{-1} također bisimulacija.
4. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ Kripkeov model i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ neki njegov generirani podmodel. Dokažite da za svaku formulu φ i svaki svijet $w \in W'$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M}, w \models \varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}', w \models \varphi$$

5. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ neki Kripkeov model i Γ neki skup formula koji je zatvoren na potformule. Na skupu W definiramo binarnu relaciju \sim_Γ ovako:

$$w \sim_\Gamma u \text{ ako i samo ako za svaku formulu } \varphi \in \Gamma \text{ vrijedi sljedeća ekvivalencija: } w \models \varphi \Leftrightarrow u \models \varphi$$

Lako je provjeriti da je \sim_Γ relacija ekvivalencije (ne trebate provjeravati). Za svaki $w \in W$ neka je $s[w]_\Gamma$ označena pripadna klasa ekvivalencije. Neka je $W_\Gamma = \{[w]_\Gamma : w \in W\}$. Neka je $\tilde{R} \subseteq W_\Gamma \times W_\Gamma$ binarna relacija definirana sa:

$$[w]_\Gamma \tilde{R} [u]_\Gamma \text{ ako i samo ako za svaku formulu } \varphi \text{ takvu da } \mathfrak{M}, u \models \varphi \text{ vrijedi } \mathfrak{M}, w \models \Diamond \varphi$$

Zatim, definiramo valuaciju V_Γ ovako:

$$V_\Gamma(p) = \begin{cases} \{[w]_\Gamma : w \in V(p)\}, & \text{ako } p \in \Gamma, \\ \emptyset, & \text{inače} \end{cases}$$

Dokažite da je $\widetilde{\mathfrak{M}} = (W_\Gamma, \tilde{R}, V_\Gamma)$ jedna filtracija modela \mathfrak{M} .